1º Teste (pares) Estimação 16/10/2020

Questão aberta:

1. Seja $X$ uma variável aleatória discreta para a qual existem valor esperado e variância. Sabe-se que $E\left(X\right)=(1-θ)/4$ e que $Var\left(X\right)=(θ+1)/16$, com $θ$ parâmetro desconhecido a verificar $0<θ<1$.

Determine o estimador para $θ $ através do método dos momentos e compare-o, em termos de eficiência relativa, com a estatística $\overbar{X}$. [30 pontos]

Pelo método dos momentos:

$E\left(X\right)=\frac{1-θ}{4}=\overbar{X}⇔\tilde{θ}=1-4\overbar{X}$

$E\left(\tilde{θ}\right)=E\left(1-4\overbar{X}\right)=1-4E\left(X\right)=1-4\frac{1-θ}{4}=θ⇒\tilde{θ}$é estimador centrado

Como $\overbar{X}$ também é centrado tem-se:

$$Var\left(\tilde{θ}\right)=Var\left(1-4\overbar{X}\right)=16Var\left(\overbar{X}\right)=16\frac{(θ+1)}{16 n}=\frac{(θ+1)}{ n}$$

$Var\left(\tilde{θ}\right)=\frac{(θ+1)}{ n}<\frac{(θ+1)}{ 16n}=Var\left(\overbar{X}\right)⇔\frac{Var\left(\tilde{θ}\right)}{Var\left(\overbar{X}\right)}=\frac{\frac{(θ+1)}{ n}}{\frac{(θ+1)}{ 16n}}=16>1$

Então $\overbar{X} $ é um estimador relativamente mais eficiente que $\tilde{θ}$

1. A distância percorrida, em quilómetros, pelos alunos do ISEG entre o *campus* e sua a residência é uma variável aleatória $X\~N\left(μ, σ^{2}\right)$. A partir de uma amostra casual das distâncias percorridas por 15 alunos, obtiveram-se os seguintes valores:

$$\sum\_{i=1}^{15}x\_{i}=70.05, \sum\_{i=1}^{15}x\_{i}^{2}=384.885, $$

Calcule um intervalo de confiança a 99% para a variância da população. Interprete o intervalo obtido. [30 pontos]

Variável fulcral:$\frac{\left(n-1\right)S^{'2}}{σ^{2}}\~χ\_{\left(n-1\right)}^{2}$

$$\overbar{x}=\frac{\sum\_{i=1}^{100}x\_{i}}{n}=\frac{70.05}{15}=4.67; s^{2}=\frac{\sum\_{i=1}^{15}x\_{i}^{2} }{n}-\overbar{x}^{2}=\frac{384.885}{15}-4.67^{2}=3.85$$

$s^{'2}=\frac{n}{n-1}s^{2}=4.125$

$ IA\_{σ^{2}}^{99\%}=\left(\frac{\left(n-1\right)S^{'2}}{q\_{2}};\frac{\left(n-1\right)S^{'2}}{q\_{1}} \right)$

Com $\left\{\begin{matrix}q\_{1}:P\left(χ\_{\left(15-1\right)}^{2}<q\_{1}\right)=0.005⇒q\_{1}=4.075 \\q\_{2}:P\left(χ\_{\left(15-1\right)}^{2}>q\_{2}\right)=0.025⇒q\_{2}=31.319 \end{matrix}\right.$

$IC\_{σ^{2}}^{99\%}=\left(\frac{\left(n-1\right)s^{'2}}{q\_{2}};\frac{\left(n-1\right)s^{'2}}{q\_{1}} \right)=\left(1.844; 14.1722\right)$

Se se retirarem um grande número de amostras de dimensão 15 e se calcular $IC\_{σ^{2}}^{99\%}$, $99\%$ dos intervalos calculados contém o verdadeiro valor da variância da população pelo que se pode afirmar que se tem 99% de certeza que

 $σ^{2}\in \left(1.844; 14.1722\right)$